

Kapitel 3: Automatische Klassifikation von Dokumenten

- 3.1 Einfache Klassifikatoren
- 3.2 Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung
- 3.3 Naive-Bayes-Klassifikator
- 3.4 Feature-Selektion

Informationssysteme SS2004

3-1

Automatische Klassifikation von Dokumenten

Ziel:

Organisation von Dokumenten in (hierarchischen) Ontologien mit möglichst geringem intellektuellem Aufwand

Techniken:

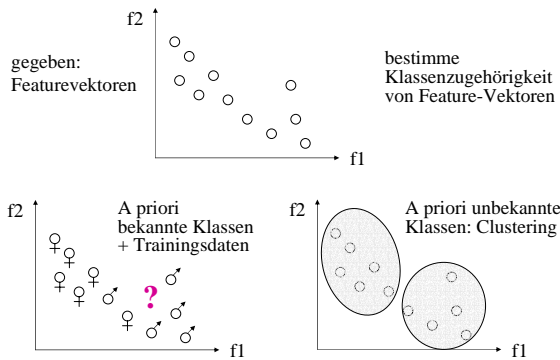
- Klassifikation mit Training (Supervised Learning)
 - kNN-Verfahren
 - Rocchio-Verfahren
 - Naives Bayes-Verfahren
 - Support Vector Machines (SVM)
 - ...
- Klassifikation ohne Training (Unsupervised Learning)
 - Verfahren der Clusteranalyse

Orthogonal dazu gibt es flache vs. hierarchische Verfahren

Informationssysteme SS2004

3-2

Klassifikationsproblem (Kategorisierung)



Informationssysteme SS2004

3-3

Anwendung von Klassifikationsverfahren im IR

- **Filtern:** teste eintreffende Dokumente (z.B. Mail, News), ob sie in eine interessante Klasse fallen
- **Übersicht:** organisiere Query-/Crawler-Resultate, Verzeichnisse, Feeds, etc.
- **Query-Expansion:** ordne Query einer Klasse zu und ergänze dementsprechende Suchterme
- **Relevanz-Feedback:** klassifiziere Treffer und lasse Benutzer relevante Klassen identifizieren, um bessere Query zu generieren
- **Query-Effizienz:** beschränke (Index-)Suche auf relevante Klasse(n)

Klassifikationsvarianten:

- mit Termen, Termhäufigkeiten, Linkstruktur als Features
- binär: Gehört ein Dokument zu einer Klasse c oder nicht?
- mehrstellig: In welche von k Klassen passt ein Dokument am besten?
- hierarchisch: Iteration der Klassifikation über ontologischen Baum

Informationssysteme SS2004

3-4

Bewertung der Klassifikationsgüte

empirisch durch automatische Klassifikation von Dokumenten, die nicht zu den Trainingsdaten gehören

Für binäre Klassifikation bzgl. Klasse C :

a = #Dok., die zu C klassifiziert wurden und zu C gehören

b = #Dok., die zu C klassifiziert wurden, aber nicht zu C gehören

c = #Dok., die nicht zu C klassifiziert wurden, aber zu C gehören

d = #Dok., die nicht zu C klassifiziert wurden und nicht zu C gehören

$$\text{Genauigkeit (accuracy)} = \frac{a + d}{a + b + c + d}$$

$$\text{Präzision (precision)} = \frac{a}{a + b} \quad \text{Ausbeute (recall)} = \frac{a}{a + c}$$

Für mehrstellige Klassifikation bzgl. Klassen C_1, \dots, C_k :

- Makrodurchschnitt über k Klassen oder
- Mikrodurchschnitt über k Klassen

Informationssysteme SS2004

3-5

3.1 Einfache Klassifikatoren: k-Nearest-Neighbor-Verfahren (kNN)

Schritt 1:

Finde unter den Trainingsdokumenten aller Klassen die k (z.B. 10-100) bzgl. der (Cosinus-) Ähnlichkeit nächsten Nachbarn eines neuen Dokuments \vec{d}

Schritt 2:

Ordne \vec{d} derjenigen Klasse C_j zu, für die die Funktion

$$f(\vec{d}, C_j) = \sum_{\vec{v} \in kNN(\vec{d})} \text{sim}(\vec{d}, \vec{v}) * \begin{cases} 1 & \text{falls } \vec{v} \in C_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

maximal wird

Bei binärer Klassifikation ordne \vec{d} der Klasse C zu, falls $f(\vec{d}, C)$ über einem Schwellwert δ ($\delta > 0.5$) liegt.

Informationssysteme SS2004

3-6

Klassifikationsverfahren von Rocchio

Schritt 1:

Repräsentiere die Trainingsdokumente einer Klasse C_j
- mit tf*idf-Vektorkomponenten – durch den **Prototypvektor**:

$$\vec{c}_j := \alpha \frac{1}{|C_j|} \sum_{\vec{d} \in C_j} \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|} - \beta \frac{1}{|D - C_j|} \sum_{\vec{d} \in D - C_j} \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}$$

mit geeigneten Koeffizienten α und β (z.B. $\alpha=16$, $\beta=4$)

Schritt 2:

Ordne ein neues Dokument \vec{d} derjenigen Klasse C_j zu, für die Cosinus-Ähnlichkeit $\cos(\vec{c}_j, \vec{d})$ maximal ist.

Satz:

Für $\alpha=\beta=1$ maximiert \vec{c}_j die Funktion:

$$f(\vec{c}_j) = \frac{1}{|C_j|} \sum_{\vec{d} \in C_j} \cos(\vec{c}_j, \vec{d}) - \frac{1}{|D - C_j|} \sum_{\vec{d} \in D - C_j} \cos(\vec{c}_j, \vec{d})$$

Informationssysteme SS2004

3-7

3.2 Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** ist ein Tripel (Ω, E, P) mit

- einer Menge Ω elementarer Ereignisse,
- einer Familie E von Teilmengen von Ω mit $\Omega \in E$, die unter \cap , \cup und $-$ mit abzählbar vielen Operanden abgeschlossen ist (bei endlichem Ω ist in der Regel $E=2^\Omega$), und
- einem W.maß $P: E \rightarrow [0,1]$ mit $P[\Omega]=1$ und $P[\cup_i A_i] = \sum_i P[A_i]$ für abzählbar viele, paarweise disjunkte A_i

Eigenschaften von P :

$$\begin{aligned} P[A] + P[\bar{A}] &= 1 & P[\emptyset] &= 0 \\ P[A \cup B] &= P[A] + P[B] - P[A \cap B] & P[\Omega] &= 1 \end{aligned}$$

Informationssysteme SS2004

3-8

Zufallsvariable

Eine **Zufallsvariable** X über einem W.raum (Ω, E, P) ist eine Funktion $X: \Omega \rightarrow M$ mit $M \subseteq \mathbb{R}$, so daß $\{e \mid X(e) \leq x\} \in E$ für alle $x \in M$.

$F_X: M \rightarrow [0,1]$ mit $F_X(x) = P[X \leq x]$ heißt **Verteilungsfunktion** von X ; bei abzählbarer Menge M heißt $f_X: M \rightarrow [0,1]$ mit $f_X(x) = P[X = x]$

Dichtefunktion von X , ansonsten ist $f_X(x)$ durch $F'_X(x)$ gegeben.

Informationssysteme SS2004

3-9

Momente

Für eine diskrete Zufallsvariable X mit Dichtefunktion f_X sind

$$E[X] = \sum_{k \in M} k f_X(k) \quad \text{der Erwartungswert von } X$$

$$E[X^i] = \sum_{k \in M} k^i f_X(k) \quad \text{das } i. \text{ Moment von } X$$

$$V[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2 \quad \text{die Varianz von } X$$

Für eine kontinuierliche Zufallsvariable X mit Dichtefunktion f_X sind

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad \text{der Erwartungswert von } X$$

$$E[X^i] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i f_X(x) dx \quad \text{das } i. \text{ Moment von } X$$

$$V[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2 \quad \text{die Varianz von } X$$

Erwartungswerte sind additiv, $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
Verteilungen nicht

Informationssysteme SS2004

3-10

Wichtige diskrete Verteilungen

- Gleichverteilung über $\{1, 2, \dots, m\}$:

$$P[X = k] = f_X(k) = \frac{1}{m} \quad \text{für } 1 \leq k \leq m$$

- Binomialverteilung (Münzwurf n -mal wiederholt; X : #Köpfe):

$$P[X = k] = f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Poisson-Verteilung (mit Rate λ):

$$P[X = k] = f_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

- Geometrische Verteilung (# Münzwürfe bis zum ersten Kopf):

$$P[X = k] = f_X(k) = (1-p)^{k-1} p$$

- 2-Poisson-Mix (mit $a_1 + a_2 = 1$):

$$P[X = k] = f_X(k) = a_1 e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} + a_2 e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^k}{k!}$$

Informationssysteme SS2004

3-11

Kontinuierliche Verteilungen

- Gleichverteilung über dem Intervall $[a,b]$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{für } a \leq x \leq b \quad (0 \text{ sonst})$$

- Exponentialverteilung (z.B. Zeit bis zum nächsten Ereignis eines Poisson-Prozesses) mit Rate $\lambda = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\# \text{ Ereignisse in } \Delta t) / \Delta t$:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{für } x \geq 0 \quad (0 \text{ sonst})$$

- Hyperexponential-Verteilung: $f_X(x) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}$

- Pareto-Verteilung: $f_X(x) \rightarrow \frac{a}{b} \left(\frac{b}{x}\right)^{a+1}$ für $x > b$, 0 sonst

$$\text{Beispiel einer „Heavy-tailed“-Verteilung mit } f_X(x) \rightarrow \frac{c}{x^{\alpha+1}}$$

Informationssysteme SS2004

3-12

Normalverteilung

- Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ (Gauß-Verteilung; approximiert Summen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen):

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- Verteilungsfunktion von $N(0,1)$: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Sei X normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 .

$$\text{Dann ist } Y := \frac{X - \mu}{\sigma}$$

normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz 1.

Informationssysteme SS2004

3-13

Zentraler Grenzwertsatz

Satz:

Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 .

Die Verteilungsfunktion F_n der Zufallsvariablen $Z_n := X_1 + \dots + X_n$ konvergiert gegen eine Normalverteilung $N(n\mu, n\sigma^2)$ mit Erwartungswert $n\mu$ und Varianz $n\sigma^2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[a \leq \frac{Z_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq b] = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Korollar:

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

konvergiert gegen eine Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2/n)$

mit Erwartungswert $n\mu$ und Varianz σ^2/n .

Informationssysteme SS2004

3-14

Satz von Bayes

Zwei Ereignisse A, B eines W.raums heißen **unabhängig**, wenn gilt $P[A \cap B] = P[A] P[B]$.

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** $P[A | B]$ von A unter der Bedingung (Hypothese) B ist definiert als: $P[A | B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

Für eine Partitionierung von Ω in Ereignisse B_1, \dots, B_n gilt:

$$P[A] = \sum_{i=1}^n P[A | B_i] P[B_i]$$

$$\text{Satz von Bayes: } P[A | B] = \frac{P[B | A] P[A]}{P[B]}$$

A-Posteriori-W.
von A

Informationssysteme SS2004

3-15

3.3 Naives Bayes-Verfahren mit binären Features X_i

$$\text{Schätze: } P[d \in c_k | d \text{ hat } \bar{X}] = \frac{P[d \text{ hat } \bar{X} | d \in c_k] P[d \in c_k]}{P[d \text{ hat } \bar{X}]}$$

$$\sim P[X/d \in c_k] P[d \in c_k]$$

$$= \prod_{i=1}^m P[X_i/d \in c_k] P[d \in c_k] \quad \text{bei Featureunabhängigkeit bzw. Linked Dependence:}$$

$$\frac{P[X/d \in c_k]}{P[X/d \notin c_k]} = \prod_i \frac{P[X_i/d \in c_k]}{P[X_i/d \notin c_k]}$$

$$= \prod_{i=1}^m p_{ik}^{X_i} (1 - p_{ik})^{1-X_i} p_k \quad \text{mit empirisch zu schätzenden } p_{ik} = P[X_i=1|c_k], p_k = P[c_k]$$

$$\Rightarrow \log P[c_k | d] \sim \sum_{i=1}^m X_i \log \frac{p_{ik}}{(1 - p_{ik})} + \sum_{i=1}^m \log(1 - p_{ik}) + \log p_k$$

für binäre Klassifikation mit Quote $P[d \in c_k] / P[d \notin c_k]$ statt $P[\dots]$
weitere Vereinfachung möglich

Informationssysteme SS2004

3-16

Naives Bayes-Verfahren mit Bag-of-Words-Modell

$$\text{Schätze: } P[d \in c_k | d \text{ hat } \bar{f}] \sim P[\bar{f} | d \in c_k] P[d \in c_k]$$

mit Termhäufigkeitsvektor \bar{f}

$$= \prod_{i=1}^m P[f_i | d \in c_k] P[d \in c_k] \quad \text{bei Featureunabhängigkeit}$$

$$= \prod_{i=1}^m \binom{\text{length}(d)}{f_i} p_{ik}^{f_i} (1 - p_{ik})^{\text{length}(d) - f_i} p_k$$

mit Binomialverteilung
für jedes Feature

$$\text{bzw. besser: } = \binom{\text{length}(d)}{f_1 f_2 \dots f_m} p_{1k}^{f_1} p_{2k}^{f_2} \dots p_{mk}^{f_m} p_k$$

$$\text{mit } \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_m} := \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \quad \text{mit Multinomialverteilung der Featurevektoren und } \sum_{i=1}^m f_i = \text{length}(d)$$

Informationssysteme SS2004

3-17

Beispiel für das naive Bayes-Verfahren (1)

3 Klassen: c1 – Algebra, c2 – Analysis, c3 – Stochastik

8 Terme, 6 Trainingsdokumente d1, ..., d6: je 2 in jeder Klasse

$$\Rightarrow p_1=2/6, p_2=2/6, p_3=2/6$$

	Gruppe								Algebra			Stochastik
	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	k=1	k=2	k=3	
d1:	3	2	0	0	0	0	0	1	p1k	4/12	0	1/12
d2:	1	2	3	0	0	0	0	0	p2k	4/12	0	0
d3:	0	0	0	3	3	0	0	0	p3k	3/12	1/12	1/12
d4:	0	0	1	2	2	0	1	0	p4k	0	5/12	1/12
d5:	0	0	0	1	1	2	2	0	p5k	0	5/12	1/12
d6:	1	0	1	0	0	0	2	2	p6k	0	0	2/12
									p7k	0	1/12	4/12
									p8k	1/12	0	2/12

Informationssysteme SS2004

3-18

Beispiel für das naive Bayes-Verfahren (2)

Klassifikation von d7: (0 0 1 2 0 0 3 0)

$$P[\bar{f} | d \in c_k] P[d \in c_k] = \left(\frac{\text{length}(d)}{f_1 f_2 \dots f_m} \right) p_{1k}^{f_1} p_{2k}^{f_2} \dots p_{mk}^{f_m} p_k$$

für k=1 (Algebra): $= \left(\frac{6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right) \left(\frac{3}{12} \right)^1 0^2 0^3 \frac{2}{6} = 0$

für k=2 (Analysis): $= \left(\frac{6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right) \left(\frac{1}{12} \right)^1 \left(\frac{5}{12} \right)^2 \left(\frac{1}{12} \right)^3 \frac{2}{6} = 20 * \frac{25}{12^6}$

für k=3 (Stochastik): $= \left(\frac{6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right) \left(\frac{1}{12} \right)^1 \left(\frac{1}{12} \right)^2 \left(\frac{4}{12} \right)^3 \frac{2}{6} = 20 * \frac{64}{12^6}$

Resultat: Ordne d7 der Klasse C3 (Stochastik) zu

Informationssysteme SS2004

3-19

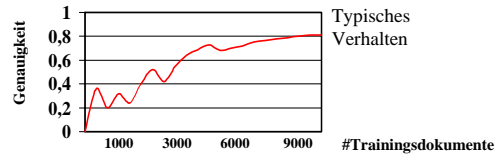
Typisches Verhalten des naiven Bayes-Verfahrens

Reuters Benchmark (siehe trec.nist.gov):

12902 kurze Artikel (Wirtschaftsnachrichten)

aus 90 Kategorien (acq, corn, earn, grain, interest, money-fx, ship, ...)

- Verwende die (bzw. einen Teil der) ältesten 9603 Artikel zum Trainieren des Klassifikators
- Verwende die neuesten 3299 Artikel zur Evaluation der Klassifikationsgenauigkeit



max. Genauigkeit liegt je nach Kategorie zwischen 50 und 90 Prozent

Informationssysteme SS2004

3-20

Verbesserung des naiven Bayes-Verfahrens

- 1) geglättete Schätzung der p_{ik} durch Laplace-Smoothing:

$1/(m + \sum_{d \in C_k} \text{length}(d))$ statt 0 für in den Trainingsdokumenten einer Klasse überhaupt nicht auftretende Features

- 2) Anreicherung des Trainingsmaterials durch unbenannte, automatisch klassifizierte Dokumente zur besseren Schätzung der p_{ik}

mit unterschiedlicher Gewichtung der intellektuell und der automatisch klassifizierten „Trainingsdokumente“

- 3) Berücksichtigung von Abhängigkeiten zwischen Features durch Verallgemeinerung auf Bayessche Netze

Informationssysteme SS2004

3-21

Erweiterung um Semisupervised Learning

Motivation:

- Klassifikator nur so gut wie seine Trainingsdaten
 - Trainingsdaten teuer wegen intellektueller Klassifikation
 - Trainingsdaten sind im Feature-Raum nur dünnbesetzt
- Verwendung zusätzlicher nichtklassifizierter Daten zum impliziten Lernen von Korrelationen

Beispiel:

- Klassifikator für Thema „cars“ wurde auf Dokumenten trainiert, die „car“ enthalten, aber nicht „automobile“.
- In den nichtklassifizierten Daten sind „car“ und „automobile“ stark korreliert.
- Testdokumente enthalten „automobile“, aber nicht „car“.

Informationssysteme SS2004

3-22

Simple Iteratives Labeling

Sei D^K die Menge der Dok. mit bekannten Klassen (Trainingsdaten) und sei D^U die Menge der Dok. mit unbekannten Klassen.

Algorithm:

```
train classifier with  $D^K$  as training data
classify docs in  $D^U$ 
repeat
  re-train classifier with  $D^K$  and the now labeled docs in  $D^U$ 
  classify docs in  $D^U$ 
until labels do not change anymore (or changes are marginal)
```

Robustheitsproblem:

einige wenige Dokumente aus D^U können den Klassifikator zu einem „Drift“ verleiten
→ bessere, aber komplexere Iterationsverfahren basierend auf dem Expectation-Maximization-Verfahren für Parameterschätzung

Informationssysteme SS2004

3-23

3.4 Feature-Selektion

Zur Entscheidung zwischen Klassen einer Stufe werden geeignete Features ausgewählt (aus Effizienzgründen und zur Vermeidung von Overfitting).

Beispiel:

Terme wie „Definition“, „Theorem“, „Lemma“ sind gute Diskriminatoren zwischen Arts, Entertainment, Science, etc.; sie sind schlechte Diskriminatoren zwischen den Unterklassen von Mathematics wie z.B. Algebra, Stochastics, etc.

→ Betrachtung statistischer bzw. informationstheoretischer Maße zur Selektion geeigneter Features

Informationssysteme SS2004

3-24

Feature-Selektion auf der Basis der Mutual Information (MI)

Mutual Information (Relative Entropie, Kullback-Leibler-Distanz):
Zur Entscheidung für Klasse c_j wähle diejenigen binären Features X_i (Termvorkommen) mit dem größten Wert von

$$MI(X_i, c_j) = P[X_i \wedge c_j] \log \frac{P[X_i \wedge c_j]}{P[X_i]P[c_j]}$$

oder

$$MI(X_i, c_j) = \sum_{X \in \{X_i, \bar{X}_i\}} \sum_{C \in \{c_j, \bar{c}_j\}} P[X \wedge C] \log \frac{P[X \wedge C]}{P[X]P[C]}$$

und für die Entscheidung bzgl. Klassen c_1, \dots, c_k :

$$MI(X_i) = \sum_{j=1}^k P[c_j] MI(X_i, c_j)$$

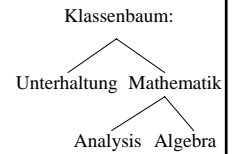
Berechnung in Zeit $O(n) + O(mk)$
für n Trainingsdokumente,
 m Terme und k Klassen

Informationssysteme SS2004

3-25

Beispiel für Feature-Selektion

	Film	Hit	Chart	Theorem	Lines	Integral	Gruppe	Vektor
	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8
d1:	1	1	0	0	0	0	0	0
d2:	0	1	1	0	0	0	1	0
d3:	1	0	1	0	0	0	0	0
d4:	0	1	1	0	0	0	0	0
d5:	0	0	0	1	1	1	0	0
d6:	0	0	0	1	0	1	0	0
d7:	0	0	0	0	1	0	0	0
d8:	0	0	0	1	0	1	0	0
d9:	0	0	0	0	0	0	1	1
d10:	0	0	0	1	0	0	1	1
d11:	0	0	0	1	0	1	0	1
d12:	0	0	1	1	1	0	1	0



Trainingsdokumente:
d1, d2, d3, d4
→ Unterhaltung
d5, d6, d7, d8
→ Analysis
d9, d10, d11, d12
→ Algebra

Informationssysteme SS2004

3-26

Beispielrechnung für Feature-Selektion auf der Basis des MI-Maßes

Unterhaltung (d1-d4) vs. Mathematik (d5-d12):

$$MI(\text{Film}) = \frac{2}{12} \log \frac{2/12}{(2/12 * 1/3)} + 0 \log 0 + \frac{2}{12} \log \frac{2/12}{(2/12 * 1/3)} + \frac{8}{12} \log \frac{8/12}{(10/12 * 2/3)}$$

$$MI(\text{Chart}) = \frac{3}{12} \log \frac{3/12}{(4/12 * 1/3)} + \frac{1}{12} \log \frac{1/12}{(4/12 * 2/3)} + \frac{1}{12} \log \frac{1/12}{(8/12 * 1/3)} + \frac{7}{12} \log \frac{7/12}{(8/12 * 2/3)}$$

$$MI(\text{Theorem}) = 0 \log 0 + \frac{6}{12} \log \frac{6/12}{(6/12 * 2/3)} + \frac{4}{12} \log \frac{4/12}{(6/12 * 1/3)} + \frac{2}{12} \log \frac{2/12}{(6/12 * 2/3)}$$

Analysis (d5-d8) vs. Algebra (d9-d12):

$$MI(\text{Film}) = 0 \log 0 + 0 \log 0 + \frac{4}{8} \log \frac{4/8}{(8/8 * 1/2)} + \frac{4}{8} \log \frac{4/8}{(8/8 * 1/2)}$$

$$MI(\text{Theorem}) = \frac{3}{8} \log \frac{3/8}{(6/8 * 1/2)} + \frac{3}{8} \log \frac{3/8}{(6/8 * 1/2)} + \frac{1}{8} \log \frac{1/8}{(2/8 * 1/2)} + \frac{1}{8} \log \frac{1/8}{(2/8 * 1/2)}$$

$$MI(\text{Vektor}) = 0 \log 0 + \frac{3}{8} \log \frac{3/8}{(3/8 * 1/2)} + \frac{4}{8} \log \frac{4/8}{(5/8 * 1/2)} + \frac{1}{8} \log \frac{1/8}{(5/8 * 1/2)}$$

Informationssysteme SS2004

3-27